

Resolución de Sistemas de ecuaciones lineales y no lineales

Representación matricial para sistemas de ecuaciones

- Un número α se dice **raíz** o **cero** de la ecuación $f(x)$ si $f(\alpha) = 0$.
- Los métodos numéricos para encontrar una raíz de una ecuación $f(x)$, generarán una sucesión $\{x_n\}$, $n=1,2,3,\dots$ tal que: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \alpha$.
- El sistema de ecuaciones está formado por un conjunto de ecuaciones del tipo $f_i(x_1, \dots, x_n)$, con $i=1, \dots, m$.

$$F = [f_1, f_2, \dots, f_m] \quad X = [x_1, x_2, \dots, x_m]$$

- Un vector $\mathbf{A} = [x_1, x_2, \dots, x_m]$ se dice **solución** de un sistema de ecuaciones $F(X)$ si $F(\mathbf{A}) = 0$.
- Los métodos numéricos para encontrar la solución de un sistema de ecuaciones $F(X)$ generarán una sucesión $\{X_n\}$, $n=1,2,3,\dots$ tal que: $\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = \mathbf{A}$.

Criterios de aproximación para sistemas de ecuaciones

Para una ecuación

1er Criterio

Dado un número $\varepsilon_1 > 0$ y adecuadamente pequeño, que llamaremos **tolerancia**, podemos escoger como **aproximación a la raíz** α a un término x_n de la sucesión mencionada, donde n es el menor entero positivo que satisface:

$$|f(x_n)| < \varepsilon_1$$

En sistemas

$$F = [f_1, f_2, \dots, f_m]$$

$$\|F(X)\| < \varepsilon_1$$

2do Criterio

El término x_n de la sucesión mencionada puede ser considerado una **aproximación a la raíz**, donde n es el menor entero positivo que cumple la condición.

$$|x_n - x_{n-1}| < \varepsilon_2$$

$$X = [x_1, x_2, \dots, x_m]$$

$$\|X_n - X_{n-1}\| < \varepsilon_2$$

Normas vectoriales

Una **norma vectorial** es una función

$$\|\cdot\|: \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R} / X \rightarrow \|X\|$$

$$\forall X, Y \in \mathfrak{R}^n, \forall \alpha \in \mathfrak{R}$$

$$\text{i) } \|X\| \geq 0, \|X\| = 0 \Leftrightarrow X = 0$$

$$\text{ii) } \|\alpha X\| = |\alpha| \|X\|$$

$$\text{iii) } \|X+Y\| \leq \|X\| + \|Y\|$$

1) La norma euclidiana (o norma 2)

$$\|X\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \quad \text{norm}(x) \text{ ó } \text{norm}(x,2)$$

2) La norma suma (o norma 1)

$$\|X\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i| \quad \text{norm}(x,1)$$

3) La norma del máximo (o norma ∞)

$$\|X\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i| \quad \text{norm}(x, \text{inf})$$

1) Distancia asociada con la norma euclidiana

$$\|X - Y\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$$

2) Distancia asociada con la norma suma

$$\|X - Y\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|$$

3) Distancia asociada con la norma del máximo

$$\|X - Y\|_\infty = \max |x_i - y_i|$$

Normas matriciales

Una **norma matricial** es una función

$$\|\cdot\|: \mathbb{R}_{n \times n} \rightarrow \mathbb{R} / X \rightarrow \|X\|$$

$$\forall A, B \in \mathbb{R}_{n \times n}, \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

$$i) \|A\| \geq 0, \|A\| = 0 \Leftrightarrow X = 0$$

$$ii) \|\alpha A\| = |\alpha| \|A\|$$

$$iii) \|A+B\| \leq \|A\| + \|B\|$$

$$iv) \|A*B\| \leq \|A\| * \|B\|$$

Norma matricial inducida por la correspondiente norma vectorial $\|\cdot\|$

$$\|A\| = \max_{x \neq 0} \frac{\|AX\|}{\|X\|}, \quad A \in \mathbb{R}_{n \times n}$$

$$1) \|A\|_2 = \max_{x \neq 0} \frac{\|AX\|_2}{\|X\|_2}$$

$$2) \|A\|_1 = \max_{x \neq 0} \frac{\|AX\|_1}{\|X\|_1}, \text{ si } \|X\|_1 = 1, \|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|$$

norm(A,1)

$$3) \|A\|_\infty = \max_{x \neq 0} \frac{\|AX\|_\infty}{\|X\|_\infty}, \text{ si } \|X\|_\infty = 1, \|A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$$

norm(A,inf)

Sistema de ecuaciones no lineales

Para resolver sistemas de ecuaciones no lineales, se pueden aplicar los métodos abiertos aplicados a la resolución de ecuaciones no lineales.

- Punto fijo
- Newton-Raphson

Siendo necesario hacer una transformación a variables vectorizadas

Sistema de ecuaciones no lineales

Con punto fijo $f(x) = 0$, $x = g(x)$

Para un sistema de ecuaciones no lineales

$$F = [f_1, f_2, \dots, f_n] \quad X = [x_1, x_2, \dots, x_n]$$

$$G = [g_1, g_2, \dots, g_n] \quad x_1 = g_1(X), x_2 = g_2(X), \dots, x_n = g_n(X)$$

$$F(X) = 0, X = G(X) \Rightarrow X^{(k+1)} = G(X^{(k)})$$

Condición de convergencia $|g'(x)| < 1$

$$\left| \frac{\partial g_1}{\partial x_1} \right| + \left| \frac{\partial g_1}{\partial x_2} \right| + \dots + \left| \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \right| \leq K_1 < 1, \quad \left| \frac{\partial g_2}{\partial x_1} \right| + \left| \frac{\partial g_2}{\partial x_2} \right| + \dots + \left| \frac{\partial g_2}{\partial x_n} \right| \leq K_2 < 1, \dots$$

En general, existe un único punto fijo, si: $\left| \frac{\partial g_i}{\partial x_j} \right| \leq \frac{K}{n}$ para $0 \leq K < 1$, y $\|X^{(n)} - A\|_\infty \leq \frac{K^n}{1-K} \|X^{(1)} - X^{(0)}\|_\infty$

$$|x - x_n| \leq \frac{K^n}{1-K} |x_1 - x_0|$$

Teorema del punto fijo para sistemas

Si $g(x)$ es una función continua en $[a, b]$ y

$$g(x) \in [a, b] \text{ para todo } x \in [a, b],$$

entonces $g(x)$ tiene por lo menos un punto fijo en $[a, b]$.

Si $D = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n / a_i \leq x_i \leq b_i, i=1, \dots, n\}$ y $g_i(X)$ continuas

$G(X) \in D$ para todo $X \in D$ entonces $G(X)$ tiene por lo menos un punto fijo en D .

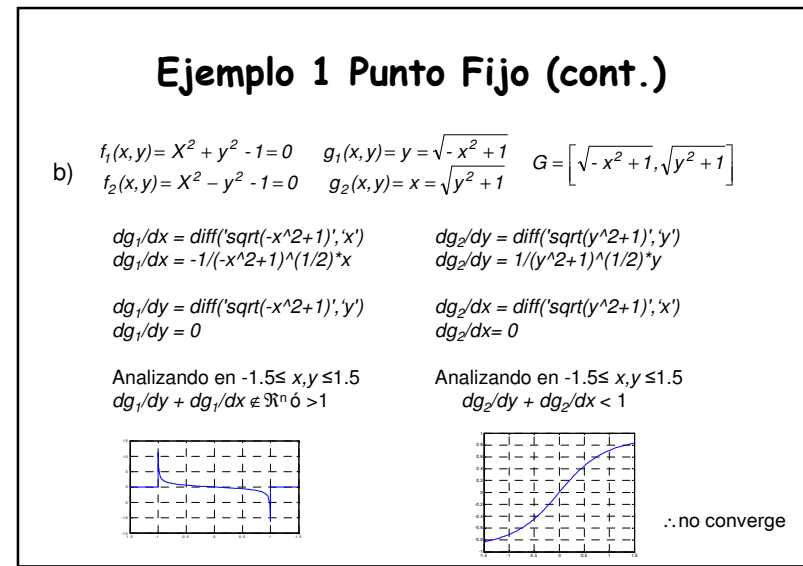
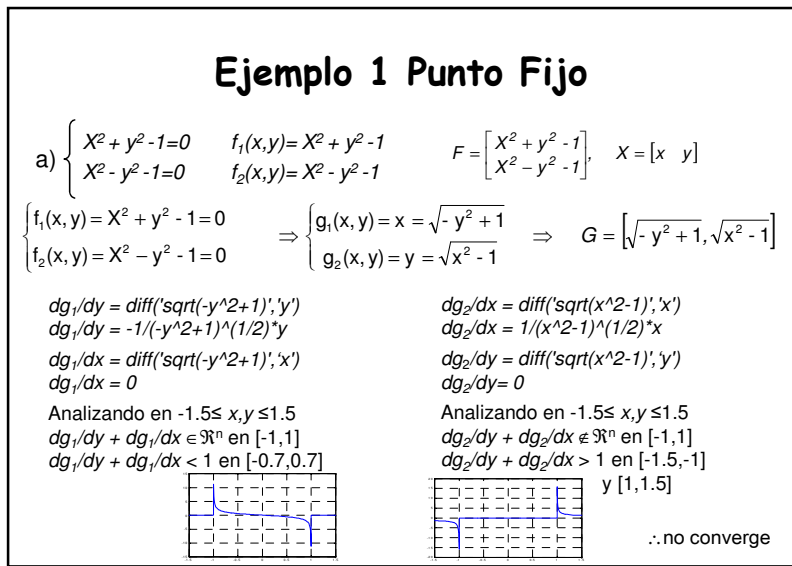
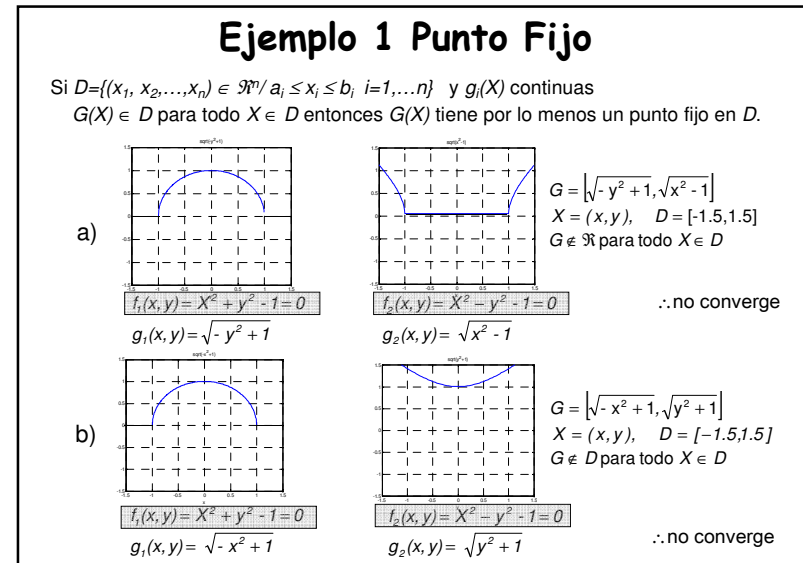
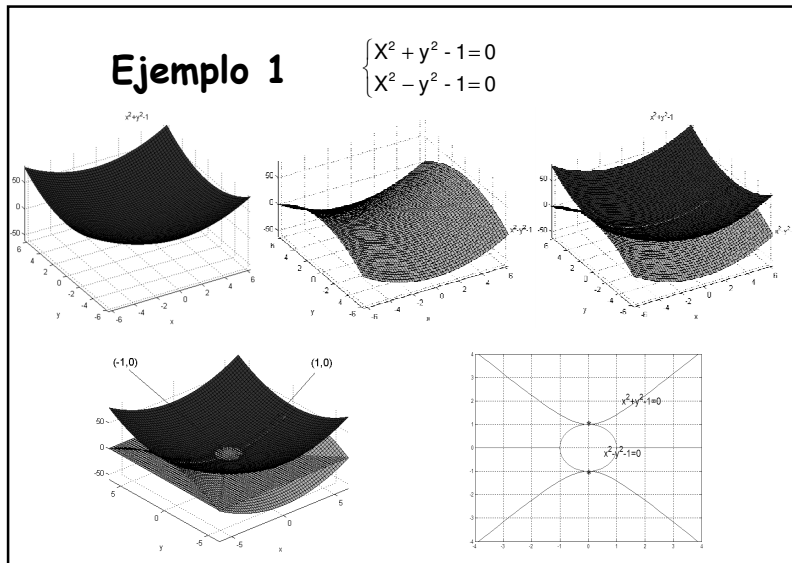
Si además, $g'(x)$ existe para todo $x \in [a, b]$ y

$$|g'(x)| \leq K < 1 \text{ para todo } x \in [a, b], K \text{ constante,}$$

entonces $g(x)$ tiene un único punto fijo α en $[a, b]$.

Si además existen las derivadas parciales $\frac{dg_j(X)}{dx_i}$ continuas en D y

para todo $X \in D$ $\left| \frac{dg_j(X)}{dx_i} \right| \leq \frac{K}{n}$ entonces $G(X)$ tiene un único punto fijo A en D .



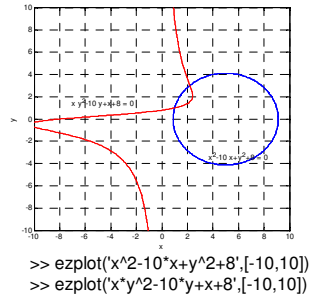
Ejemplo 2 Punto Fijo

$$\begin{cases} f_1(x, y) = x^2 - 10x + y^2 + 8 = 0 \Rightarrow x = \frac{x^2 + y^2 + 8}{10} = g_1(x, y) \\ f_2(x, y) = xy^2 + x - 10y + 8 = 0 \Rightarrow y = \frac{xy^2 + x + 8}{10} = g_2(x, y) \end{cases}$$

Para $0 \leq x, y \leq 1.5$

$$\begin{cases} 0 \leq \frac{x^2 + y^2 + 8}{10} \leq 1.25 \leq 1.5 \\ 0 \leq \frac{xy^2 + x + 8}{10} \leq 1.287 \leq 1.5 \end{cases}$$

$G(X) \in D$ para todo $X \in D$
entonces $G(X)$ tiene por lo menos un punto fijo en D



Ejemplo 2 Punto Fijo (cont.)

Máx. para $0 \leq x, y \leq 1.5$

$$\begin{aligned} dg_1/dx &= \text{diff}('x^2+y^2+8)/10', 'x') \\ dg_1/dx &= 1/5 \cdot x \end{aligned}$$

$$dg_1/dx = x/5 = 0.3$$

$$\begin{aligned} dg_1/dy &= \text{diff}('x^2+y^2+8)/10', 'y') \\ dg_1/dy &= 1/5 \cdot y \end{aligned}$$

$$dg_1/dy = y/5 = 0.3$$

$$\begin{aligned} dg_2/dx &= \text{diff}('x*y^2+x+8)/10', 'x') \\ dg_2/dx &= 1/10 \cdot y^2 + 1/10 = (y^2+1)/10 \end{aligned}$$

$$dg_2/dx = (y^2+1)/10 = 0.325$$

$$\begin{aligned} dg_2/dy &= \text{diff}('x*y^2+x+8)/10', 'y') \\ dg_2/dy &= 1/5 \cdot x \cdot y \end{aligned}$$

$$dg_2/dy = x \cdot y / 5 = 0.45$$

$$\left| \frac{\partial g_j(X)}{\partial x_i} \right| \leq \frac{K}{n} = \frac{0.9}{2}$$

$\therefore$ converge

```
>> X=[0.5,0.5]
>> X=[(X(1)^2+X(2)^2+8)/10, (X(1)*X(2)^2+X(1)+8)/10]
X = 0.8500 0.8625
>> X=[(X(1)^2+X(2)^2+8)/10, (X(1)*X(2)^2+X(1)+8)/10]
X = 0.9466 0.9482
>> X=[(X(1)^2+X(2)^2+8)/10, (X(1)*X(2)^2+X(1)+8)/10]
X = 0.9795 0.9798
>> X=[(X(1)^2+X(2)^2+8)/10, (X(1)*X(2)^2+X(1)+8)/10]
X = 0.9919 0.9920
>> X=[(X(1)^2+X(2)^2+8)/10, (X(1)*X(2)^2+X(1)+8)/10]
X = 0.9968 0.9968
>> X=[(X(1)^2+X(2)^2+8)/10, (X(1)*X(2)^2+X(1)+8)/10]
X = 0.9987 0.9987
>> X=[(X(1)^2+X(2)^2+8)/10, (X(1)*X(2)^2+X(1)+8)/10]
X = 0.9995 0.9995
>> X=[(X(1)^2+X(2)^2+8)/10, (X(1)*X(2)^2+X(1)+8)/10]
X = 0.9998 0.9998
>> X=[(X(1)^2+X(2)^2+8)/10, (X(1)*X(2)^2+X(1)+8)/10]
X = 0.9999 0.9999
>> X=[(X(1)^2+X(2)^2+8)/10, (X(1)*X(2)^2+X(1)+8)/10]
X = 1.0000 1.0000
```

Sistema de ecuaciones no lineales

Con Newton $X_{k+1} = X_k - f(X_k) / f'(X_k)$

Para un sistema de ecuaciones no lineales

$$F(X) = 0, F(X) = [f_1(X), f_2(X), \dots, f_n(X)] \quad X = [x_1, x_2, \dots, x_n]$$

$$X_{k+1} = X_k - J^{-1}(F(x_k), x_k) * F(x_k)$$

Con $J(F(x_k), x_k) \neq 0$

Como hallar en Matlab el jacobiano
(toolbox symbolic)
syms var1 var2
Jacobian ([f1,f2,...],[var1,var2,...]):

$$J(F, X) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}$$

Ejemplo 1 Newton

$$X_{k+1} = X_k - J^{-1}(F(X_k), X_k) * F(X_k)$$

$X = [x, y]$
 $f_1(X) = x^2 + y^2 - 1$
 $f_2(X) = x^2 - y^2 - 1$

$\text{syms } x \ y$
 $J = \text{Jacobian}([x^2 + y^2 - 1, x^2 - y^2 - 1], [x, y])$
 $J = \begin{bmatrix} 2x & 2y \\ 2x & -2y \end{bmatrix}$

$$X_0 = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$

$$X_1 = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 * 0.5 & 2 * 0.5 \\ 2 * 0.5 & -2 * 0.5 \end{bmatrix}^{-1} * \begin{bmatrix} 0.5^2 + 0.5^2 - 1 \\ 0.5^2 - 0.5^2 - 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}^{-1} * \begin{bmatrix} -0.5 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & -0.5 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} -0.5 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -0.75 \\ 0.25 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.25 \\ 0.25 \end{bmatrix}$$

$$X_2 = \begin{bmatrix} 1.25 \\ 0.25 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 * 1.25 & 2 * 0.25 \\ 2 * 1.25 & -2 * 0.25 \end{bmatrix}^{-1} * \begin{bmatrix} 1.25^2 + 0.25^2 - 1 \\ 1.25^2 - 0.25^2 - 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.25 \\ 0.25 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.2 & 0.2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 0.625 \\ 0.5 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1.25 \\ 0.25 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.225 \\ 0.125 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.025 \\ 0.125 \end{bmatrix}, \quad X_3 = \begin{bmatrix} 1.0003 \\ 0.0625 \end{bmatrix}, \quad X_4 = \begin{bmatrix} 1.0000 \\ 0.0313 \end{bmatrix}$$

Va convergiendo

Ejemplo 2 Newton

$$\begin{bmatrix} X_{k+1} \\ Y_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_k \\ Y_k \end{bmatrix} - J^{-1} \begin{bmatrix} f_1(X_k, Y_k) \\ f_2(X_k, Y_k) \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} f_1(x, y) = x^2 - 10x + y^2 + 8 = 0 \\ f_2(x, y) = xy^2 + x - 10y + 8 = 0 \end{cases} \quad J = \begin{bmatrix} 2x - 10 & 2y \\ y^2 + 1 & 2xy - 10 \end{bmatrix}$$

$$X_0 = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$

$$X_1 = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 * 0.5 - 10 & 2 * 0.5 \\ 0.5^2 + 1 & 2 * 0.5 * 0.5 - 10 \end{bmatrix}^{-1} * \begin{bmatrix} 0.5^2 - 10 * 0.5 + 0.5^2 + 8 \\ 0.5 * 0.5^2 + 0.5 - 10 * 0.5 + 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -9 & 1 \\ 1.25 & -9.5 \end{bmatrix}^{-1} * \begin{bmatrix} 3.5 \\ 3.625 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.9377 \\ 0.9392 \end{bmatrix}$$

$$X_2 = \begin{bmatrix} 0.9377 \\ 0.9392 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -8.1246 & 1.8783 \\ 1.8820 & -8.2387 \end{bmatrix}^{-1} * \begin{bmatrix} 0.3844 \\ 0.3731 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.9987 \\ 0.9984 \end{bmatrix}$$

$$X_3 = \begin{bmatrix} 0.9987 \\ 0.9984 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -8.0026 & 1.9968 \\ 1.9968 & -8.0058 \end{bmatrix}^{-1} * \begin{bmatrix} 0.0072 \\ 0.0103 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.000 \\ 1.000 \end{bmatrix}$$

```

syms x y
>>F=[x^2-10*x+y^2+8;x*y^2-10*y+x+8]
F =
x^2-10*x+y^2+8
x*y^2-10*y+x+8
>> X=[x;y]
X =
x
y
>> N=X-jacobian(F)/F % o N=X-F/jacobian(F) con F y X vector fila
N =
x-(-40+5*y^2+7*x*y-8*y-10*x^2*y+x^3*y+50*x-5*x^2)/(-y^3-y+2*x^2*y-10*x*y-10*x+50)
y-1/2*(-88+x^2-20*x*y+100*y+16*x-9*y^2+y^2*x^2-y^4)/(-y^3-y+2*x^2*y-10*x*y-10*x+50)
>> X=subs(N,[x;y],[0.5;0.5])
X =
0.9377
0.9392
>> X=subs(N,[x;y],X)
X =
0.9987
0.9984
>> X=subs(N,[x;y],X)
X =
1.0000
1.0000

```

Ejemplo 2 Newton
Empleando MatlabMétodo Newton simplificado
Ejemplo 2

$$X_{k+1} = X_k - J^{-1}(F(X_k), X_k) * F(X_k) \Rightarrow X_{k+1} - X_k = -J^{-1}(F(X_k), X_k) * F(X_k)$$

$$J(F(X_k), X_k) * (X_{k+1} - X_k) = -F(X_k)$$

$$\text{Si } Z_{k+1} = (X_{k+1} - X_k) \Rightarrow J(F(X_k), X_k) * Z_{k+1} = -F(X_k) \text{ con } |Z_{k+1}| < \varepsilon$$

$$\begin{cases} f_1(x, y) = x^2 - 10x + y^2 + 8 = 0 \\ f_2(x, y) = xy^2 + x - 10y + 8 = 0 \end{cases} \quad J = \begin{bmatrix} 2x - 10 & 2y \\ y^2 + 1 & 2xy - 10 \end{bmatrix} \quad X_0 = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 * 0.5 - 10 & 2 * 0.5 \\ 0.5^2 + 1 & 2 * 0.5 * 0.5 - 10 \end{bmatrix} * Z_{k+1} = \begin{bmatrix} 0.5^2 - 10 * 0.5 + 0.5^2 + 8 \\ 0.5 * 0.5^2 + 0.5 - 10 * 0.5 + 8 \end{bmatrix}$$

$$Z_{k+1} = \begin{bmatrix} 0.4377 \\ 0.4392 \end{bmatrix}, \quad X_{k+1} = Z_{k+1} + X_k = \begin{bmatrix} 0.4377 \\ 0.4392 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.9377 \\ 0.9392 \end{bmatrix}$$

Se evita invertir el Jacobiano en cada iteración

Dificultades en la solución de sistemas de ecuaciones no lineales

- No es fácil encontrar buenos valores iniciales. Conocer el problema.
- No es posible graficar superficies multidimensionales ($n > 2$). Reducción de ecuaciones. Partición del sistema de ecuaciones.

Solución numérica de sistemas de ecuaciones lineales

Un sistema de n ecuaciones, con coeficientes reales en las n -incógnitas $x_1, x_2, \dots, x_n$, de la forma:

$$F(X) \begin{cases} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \end{cases} \quad \text{con } f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n - b_i$$

$a_{ij}, a_{i2}, \dots, a_{in}$ y b_i constantes $\in \mathbb{R}$
 $i = 1, \dots, n$,
se dice **sistema lineal**

Si $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $\|F(X)\| = 0$

y $X \in \mathbb{R}^n$ entonces X es una solución real del sistema

Un sistema de n -ecuaciones lineales puede escribirse en la forma:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots & \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned} \quad \text{con } a_{ij}, b_j \in \mathbb{R}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n$$

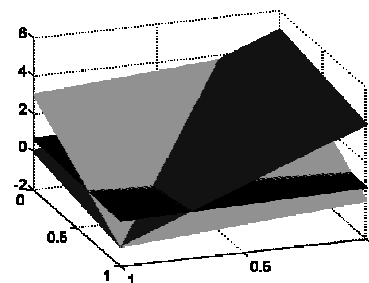
ó en la forma matricial equivalente $AX = B$ con:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

A es la matriz de coeficientes del sistema, el vector columna X es el vector de incógnitas y B es el vector de términos independientes.

Sistemas con solución única

Consideraremos únicamente sistemas de ecuaciones lineales $AX = b$ con $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ que tengan solución única para cada vector $b \in \mathbb{R}^n$, es decir, con A invertible $\Rightarrow X = b \cdot A^{-1}$.



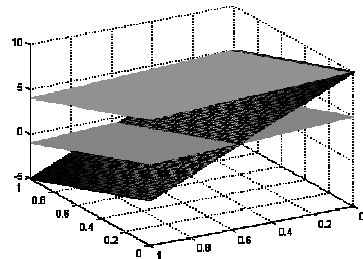
Matlab introduce una notación particular implementando los operadores $\backslash$ y $/$. La solución a un sistema es expresada como:

$X = A \backslash b$ (con b vector columna) equivalente a $\text{inv}(A) * b$.

ó
 $X = b / A$ (con b vector fila) equivalente a $b * \text{inv}(A)$.

Emplea eliminación Gaussiana

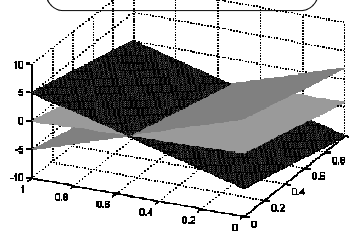
Sistemas sin solución única



Si $\det \rightarrow 0$, no implica que la matriz $\rightarrow$ singular, puede depender de los coeficientes de la matriz

Se anula el determinante,
matriz singular, no invertible
En Matlab: `det(A)`
`ans = 0`

`X=b/A`
Warning: Matrix is singular
to working precision.
`X = Inf Inf Inf`



Métodos directos

Los **métodos directos** nos proporcionan una solución del sistema en un número finito de pasos.

Si usamos aritmética finita para los cálculos, obtendremos por lo general una solución aproximada, debido únicamente a los errores de redondeo, puesto que no hay errores de truncamiento o de fórmula.

Los métodos directos más usados tienen como base la **eliminación de Gauss**.

Sustitución

Si la matriz A es triangular (superior o inferior) con todas sus componentes sobre la diagonal principal no-nulas.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Como $a_{nn} \neq 0$, se puede despejar x_n de la última ecuación y obtenemos:

$$\begin{cases} x_n = \frac{b_n}{a_{nn}} & m = n-1, \dots, 1 \\ x_m = \frac{\left(b_m - \sum_{k=m+1}^n a_{mk} x_k \right)}{a_{mm}} \end{cases}$$

Este método se denomina **sustitución reversiva, regresiva o hacia atrás**

(Aprox. n^2+n operaciones)

Si A es triangular inferior, se despeja x_1 de la primera ecuación. En este caso se denomina **sustitución progresiva o hacia adelante**.

Transformaciones elementales

Matriz ampliada $[A/B] = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{1n} & \dots & a_{nn} & b_n \end{bmatrix}$

Operaciones que producen sistemas equivalentes:

- **Intercambio:** En el orden de las ecuaciones (filas), no altera el resultado. En el orden de las variables (columnas), altera el orden de las variables en el resultado.
- **Escalado:** Producto de la ecuación por constante no nula
- **Sustitución:** Suma de la ecuación más múltiplo de otra ecuación: $E_{r1} = E_r + c \cdot E_q$

Eliminación de Gauss

Si la matriz A no es triangular, puede convertirse mediante el método de eliminación Gaussiana. El sistema $AX = B$ tiene la forma:

$$\begin{matrix} E_1 \\ E_2 \\ E_i \\ E_n \end{matrix} : \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Se elimina el coeficiente de x_1 en cada una de las ecuaciones $E_2, E_3, \dots, E_n$ para obtener un sistema equivalente $A^{(1)}X = B^{(1)}$, realizando las transformaciones elementales.

$$\begin{matrix} E_1^{(1)} \\ E_2^{(1)} \\ E_i^{(1)} \\ E_n^{(1)} \end{matrix} : \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$\left(E_i - \left(\frac{a_{i1}}{a_{11}} \right) E_1 \right) \rightarrow E_i^{(1)} \quad i=2,3,\dots,n$$

Pivoteo

Luego se elimina el coeficiente de x_2 en las ecuaciones $E_3, E_4, \dots$. Y así sucesivamente hasta eliminar el coeficiente de x_{n-1} . En general:

$$\left(E_i^{(j-1)} - \left(\frac{a_{ij}^{(j-1)}}{a_{jj}^{(j-1)}} \right) E_j^{(j-1)} \right) \rightarrow E_i^{(j)}, \quad i=j+1,\dots,n$$

multiplicador
pivote

Si algún $a_{ij}=0$ se deben intercambiar filas, si $|a_{jj}| \rightarrow 0$ el intercambio de filas disminuye el error

(Operaciones aproximadas: $2/3 n^3 + 5/2 n^2 - 1/6 n$)

Ejemplo

$$\begin{aligned} E1: 10x_1 - 7x_2 &= 7 \\ E2: -3x_1 + 2x_2 + 6x_3 &= 4 \\ E3: 5x_1 - x_2 + 5x_3 &= 6 \end{aligned}$$

$$\begin{matrix} E1 \\ E2 \\ E3 \end{matrix} \begin{bmatrix} 10 & -7 & 0 & 7 \\ -3 & 2 & 6 & 4 \\ 5 & -1 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

Matriz ampliada $[A|B]$

Ejemplo (cont):

$$\begin{matrix} E1 \\ E2 \\ E3 \end{matrix} \begin{bmatrix} 10 & -7 & 0 & 7 \\ -3 & 2 & 6 & 4 \\ 5 & -1 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} E1^{(1)} \\ E2^{(1)} \\ E3^{(1)} \end{matrix} \begin{bmatrix} 10 & -7 & 0 & 7 \\ 0 & -0.1 & 6 & 6.1 \\ 0 & 2.5 & 5 & 2.5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} E2^{(1)} \\ E3^{(1)} \end{matrix} \begin{bmatrix} -3/10 \\ 5/10 \end{bmatrix} * E1$$

El coeficiente 10 de x_1 es el **pivote** y -0.3 y 0.5 los **multiplicadores**

$$\begin{matrix} E1^{(2)} \\ E2^{(2)} \\ E3^{(2)} \end{matrix} \begin{bmatrix} 10 & -7 & 0 & 7 \\ 0 & -0.1 & 6 & 6.1 \\ 0 & 0 & 155 & 155 \end{bmatrix}$$

$$E3^{(2)} = E3^{(1)} - (2.5 / -0.1) * E2^{(1)}$$

$$\begin{matrix} E1^{(1)} \\ E3^{(1)} \\ E2^{(1)} \end{matrix} \begin{bmatrix} 10 & -7 & 0 & 7 \\ 0 & 2.5 & 5 & 2.5 \\ 0 & -0.1 & 6 & 6.1 \end{bmatrix}$$

Intercambio de filas

$$\begin{matrix} E1^{(2)} \\ E3^{(2)} \\ E2^{(2)} \end{matrix} \begin{bmatrix} 10 & -7 & 0 & 7 \\ 0 & 2.5 & 5 & 2.5 \\ 0 & 0 & 6.2 & 6.2 \end{bmatrix}$$

Pivote 2.5
Multiplicador -0.04

$$E2^{(2)} = E2^{(1)} - (-0.1/2.5) * E3^{(1)}$$

Pivote 6.2

$$\begin{aligned} 6.2x_3 &= 6.2 \Rightarrow x_3 = 1. \\ 2.5x_2 + (5)(1) &= 2.5 \Rightarrow x_2 = -1. \\ 10x_1 + (-7)(-1) &= 7 \Rightarrow x_1 = 0. \end{aligned}$$

Factorización LU

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.5 & 1 & 0 \\ -0.3 & -0.04 & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 10 & -7 & 0 \\ 0 & 2.5 & 5 \\ 0 & 0 & 6.2 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Multiplicadores
Pivotes

L contiene los multiplicadores utilizados en la eliminación, U la matriz final de coeficientes y P describe las permutaciones.
 $LU = PA$

Siendo b_1 un nuevo término independiente

$$\begin{aligned} AX &= b_1 \Rightarrow PAX = Pb_1 \\ &\Rightarrow LUX = Pb_1 \\ &\Rightarrow UX = L^{-1} Pb_1 = c \\ &\Rightarrow Lc = Pb_1 \end{aligned}$$

Los pasos a seguir son:

Paso 1. Calcular Pb_1 .

Paso 2. Resolver c , en $Lc = Pb_1$ por sustitución progresiva.

Paso 3. Resolver X , en $UX = c$ por sustitución regresiva.

Ejemplo LU

1er Ejemplo

$$\begin{array}{l} E1 \\ E2 \\ E3 \end{array} \begin{bmatrix} 10 & -7 & 0 & 7 \\ -3 & 2 & 6 & 4 \\ 5 & -1 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

2do Ejemplo con términos independientes cambiados

$$\begin{array}{l} E1 \\ E2 \\ E3 \end{array} \begin{bmatrix} 10 & -7 & 0 \\ -3 & 2 & 6 \\ 5 & -1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 \\ 6 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$Lc = Pb, UX = c$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.5 & 1 & 0 \\ -0.3 & -0.04 & 1 \end{bmatrix}, U = \begin{bmatrix} 10 & -7 & 0 \\ 0 & 2.5 & 5 \\ 0 & 0 & 6.2 \end{bmatrix}, P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1.0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 1.0 & 0 \\ -0.3 & -0.04 & 1.0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}, \quad \begin{array}{l} c_1 = 9 \\ c_2 = 5 - 0.5 * 9 \\ c_3 = 6 + 0.3 * 9 + 0.04 * 5 \end{array} \Rightarrow \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9.00 \\ 0.50 \\ 8.72 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 10 & -7 & 0 \\ 0 & 2.5 & 5 \\ 0 & 0 & 6.2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9.00 \\ 0.50 \\ 8.72 \end{bmatrix}, \quad \begin{array}{l} x_1 = (9 - 7 * 2.62) / 10 \\ x_2 = (0.5 - 5 * 1.41) / 2.5 \\ x_3 = 8.72 / 6.2 \end{array} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.93 \\ -2.62 \\ 1.41 \end{bmatrix}$$

Casos particulares

Si **A** es una matriz tridiagonal y E.D.D. por filas, podemos usar eliminación Gaussiana simple para resolver el sistema. O resolverlo a partir de la factorización directa $A = LU$.

$$A = \begin{bmatrix} d_1 & c_1 & 0 & \dots & 0 \\ a_2 & d_2 & c_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_3 & d_3 & c_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{n-1} & d_{n-1} & c_{n-1} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & a_n & d_n \end{bmatrix}, \quad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \gamma_2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \gamma_3 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \gamma_{n-1} & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} \alpha_1 & c_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & c_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \alpha_{n-1} & c_{n-1} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \alpha_n \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{l} \alpha_1 = d_1 \\ \gamma_i = \frac{a_i}{\alpha_{i-1}} \\ \alpha_i = d_i - \gamma_i c_{i-1} \\ i = 2, 3, \dots, n \end{array}$$

Si **A** es una matriz real, simétrica y definida positiva (pivotes positivos), entonces **A** tiene una única factorización de la forma $A = LL^T$. Esta factorización se conoce como **factorización de Choleski**.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & 0 \\ l_{41} & l_{42} & l_{43} & l_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{11} & l_{21} & l_{31} & l_{41} \\ 0 & l_{22} & l_{32} & l_{42} \\ 0 & 0 & l_{33} & l_{43} \\ 0 & 0 & 0 & l_{44} \end{bmatrix}, \quad \begin{array}{l} l_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} l_{jk}}{l_{jj}}, j = 2, \dots, i-1 \\ l_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}^2}, i = 1, \dots, n \end{array}$$

Otras posibilidades a partir del método de eliminación de Gauss

- **Eliminación de Jordan:** Se genera una matriz diagonal para eliminar la sustitución. Se eliminan elementos arriba y abajo del pivote.
- **Inversión de matrices:** A partir de $[A/B]$, con B matriz identidad, aplicando Jordan y escalado, se obtiene $[I/B']$ con B' inversa de A .
- **Determinante:** A partir de la matriz triangulada $\det(A) = (-1)^r \prod a_{ii}$, con r = nro. Intercambios de filas.
- **Factorización LU:** Permite reservar los parámetros de la eliminación de Gauss, para ser aplicados en la resolución de sistemas con igual matriz A .

Funciones MATLAB

$[L, U, P] = LU(A)$ Donde A puede ser una matriz rectangular
L es la matriz triangular inferior de LU con elementos 1 en la diagonal
U es la matriz triangular superior de LU
P es la matriz de permutaciones tal que $P^*A = L^*U$.
 $X = U \setminus (L \setminus b)$

R = CHOL(X) Factorización Cholesky. $A = R^*R$

$$X = R \setminus (R^* \setminus b)$$

Matrices ralas

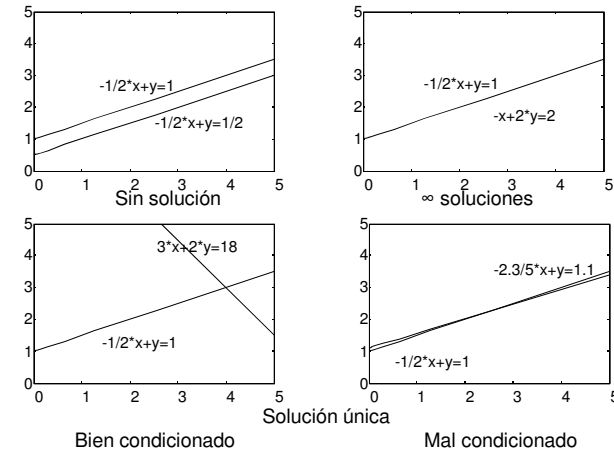
Las **matrices** asociadas con los sistemas de ecuaciones lineales se clasifican en **densas y ralas (sparse)**.

Las matrices densas tienen pocos elementos nulos y su orden es relativamente pequeño (≤ 100). Para resolver sistemas con matrices densas pueden ser utilizados los métodos directos.

Las matrices ralas tienen pocos elementos no nulos y surgen, por ejemplo, al resolver ecuaciones diferenciales por métodos de diferencias finitas; su orden puede ser muy grande. Para resolver sistemas con matrices ralas son recomendados los métodos iterativos.

Matlab, de todos modos, posee funciones para trabajar con matrices ralas (consideradas un tipo de dato) y particularmente para resolver sistemas de ecuaciones con métodos directos. (luinc, cholinc).

Condicionamiento del Sistema



Condicionamiento del sistema

Si X es solución exacta de un sistema lineal $AX = b$,
 A invertible, $b \neq 0$, y

$\tilde{X}$ es una solución aproximada de dicho sistema,

$\Rightarrow e = |X - \tilde{X}|$ es el **vector error de X** (desconocido) y

$R = A\tilde{X} - b$ es el **vector error residual**, mide hasta dónde la solución aproximada $\tilde{X}$ satisface el sistema

Si $R = 0 \Rightarrow \tilde{X} = X \Rightarrow e = 0$

$\tilde{X}$ tal que $A\tilde{X} = R + b$ y $\tilde{X}$ es solución de una perturbación del sistema $AX = b$.

Si R "pequeño" $\Rightarrow e$ también "pequeño"?

Sistemas mal condicionados

Ejemplos:

$$1) \begin{cases} x + y = 2 \\ 10.05x + 10y = 21 \end{cases} \quad X_1 = \begin{bmatrix} 20 \\ -18 \end{bmatrix}$$

Perturbando en aprox. .5% un coeficiente

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ (10.1)x + 10y = 21 \end{cases} \quad \tilde{X}_1 = \begin{bmatrix} 10 \\ -8 \end{bmatrix}$$

Cambio relativo de aprox el 50% en la solución

$$e_1 = \tilde{X}_1 - X_1 = \begin{bmatrix} -10 \\ 10 \end{bmatrix}$$

$$2) \begin{cases} 4.1x + 2.8y = 4.1 \\ 9.7x + 6.6y = 9.7 \end{cases} \quad X_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{cases} 4.1x + 2.8y = 4.11 \\ 9.7x + 6.6y = 9.7 \end{cases} \quad \tilde{X}_2 = \begin{bmatrix} .34 \\ .97 \end{bmatrix} \quad e_2 = \begin{bmatrix} .66 \\ .97 \end{bmatrix}$$

Una perturbación de aprox. .2% en el término independiente, muestra un cambio relativo aproximado de 66% en el valor de X .

Ejemplos (cont.): Error residual

$$1) R_1 = AX_1 - b = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 10.05 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 \\ -8 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 21 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 20.5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 21 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -0.5 \end{bmatrix}$$

$$\|e_1\|_\infty = \max(|-10|, |10|) = 10, \quad \|R_1\|_\infty = \max(|0|, |-0.5|) = 0.5$$

$$2) R_2 = AX_2 - b = \begin{bmatrix} 4.1 & 2.8 \\ 9.7 & 6.6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.34 \\ 0.97 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4.11 \\ 9.7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.11 \\ 9.7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4.1 \\ 9.7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.01 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\|e_2\|_\infty = \max(|0.34|, |0.97|) = 0.97, \quad \|R_2\|_\infty = \max(|0.01|, |0|) = 0.01$$

El error en la solución es “grande” y el error residual es “pequeño”.

Se puede probar que: $\frac{\|R\|}{\|b\|}$ “pequeño” $\Rightarrow \frac{\|e\|}{\|X\|}$ “pequeño”
si se satisface la condición $\|A\| \|A^{-1}\| \approx 1$

Número de Condición

El número resultante de $\|A\| \|A^{-1}\|$ se llama **Número de Condición (Cond(A))** de la matriz no-singular **A**, relativo a una norma matricial. $\text{Cond}(A) \geq 1$, cualquiera sea la norma matricial inducida.

$$I_n = AA^{-1}, \|I_n\| \leq \|A\| \|A^{-1}\| \quad y \quad \|I_n\| = \max_{x \neq 0} \left\| \frac{X}{\|X\|} \right\| = \max_{x \neq 0} \frac{\|X\|}{\|X\|} = 1$$

Si $\text{Cond}(A) \approx 1 \Rightarrow A$ está **bien condicionada** (el sistema $AX=b$ está **bien condicionado**).

Si $\text{Cond}(A) \gg 1$, **A** está **mal condicionada**, es posible que **A** tenga un mal comportamiento, en el sentido que un error residual relativo pequeño puede corresponder a una solución aproximada mala (el sistema $AX=b$ está **mal condicionado**).

$$1) \text{cond} \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 10.05 & 10 \end{bmatrix} \right) = \left\| \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 10.05 & 10 \end{bmatrix} \right\|_\infty * \left\| \begin{bmatrix} -200 & 20 \\ 201 & -20 \end{bmatrix} \right\|_\infty = 20.05 * 221 = 4431.05 \gg 1$$

Relación residuo – Error solución

• La relación entre $\frac{\|R\|}{\|b\|}$ y $\frac{\|e\|}{\|X\|}$ es:

$$\frac{\|R\|}{\|b\|} * \frac{1}{\text{cond}(A)} \leq \frac{\|e\|}{\|X\|} \leq \frac{\|R\|}{\|b\|} * \text{cond}(A)$$

1)

$$\frac{0.5}{21} * \frac{1}{4431.05} \leq \frac{\|X - \tilde{X}\|}{\|X\|} \leq \frac{0.5}{21} * 4431.05 \Rightarrow 5.37 * 10^{-6} \leq \frac{\|X - \tilde{X}\|}{\|X\|} \leq 105.50$$

2)

$$\frac{0.01}{9.7} * \frac{1}{2249.4} \leq \frac{\|X - \tilde{X}\|}{\|X\|} \leq \frac{0.01}{9.7} * 2249.4 \Rightarrow 4.5831 * 10^{-7} \leq \frac{\|X - \tilde{X}\|}{\|X\|} \leq 2.2494$$

Cota del error relativo

Dado un sistema $AX=b$, si δA y δb denotan perturbaciones en **A** y **b** respectivamente, se puede establecer una cota para el error relativo en términos de las perturbaciones relativas y la condición de **A**.

Si **X** es la solución exacta de $AX=b$ y $\tilde{X}$ es la solución exacta del sistema perturbado $(A+\delta A)\tilde{X} = b + \delta b$.

Si **A** es no-singular, $\|\delta A\| < \frac{1}{\|A^{-1}\|}$ (lo que asegura que $A + \delta A$ es invertible y que

$$1 - \text{cond}(A) \frac{\|\delta A\|}{\|A\|} > 0 \Rightarrow \frac{\|\tilde{X} - X\|}{\|X\|} \leq \frac{\text{Cond}(A)}{1 - \text{Cond}(A) \frac{\|\delta A\|}{\|A\|}} \left(\frac{\|\delta b\|}{\|b\|} + \frac{\|\delta A\|}{\|A\|} \right)$$

$$1) \|\delta A\| = 0.05, \quad \frac{1}{\|A^{-1}\|} = \frac{1}{221} = 0.0045, \quad \|\delta A\| > \frac{1}{\|A^{-1}\|} \quad 2) \|\delta A\| = 0, \text{cond}(A) * \frac{\|\delta b\|}{\|b\|} = \text{cond}(A) * \frac{0.01}{9.7}$$

Métodos Indirectos

En los **métodos iterativos o indirectos** se parte de una aproximación inicial a la solución del sistema dado y se genera, a partir de dicha aproximación, una sucesión de vectores $\{X_n\}$ que deberían converger a la solución del sistema.

Además de los errores de redondeo, si se usa aritmética finita, habrá errores de truncamiento o de fórmula.

Los métodos iterativos más simples y conocidos están basados en **Iteraciones de Punto Fijo**.

Método Jacobi

Dado un sistema $AX = b$, donde A no-singular se puede transformar en un sistema equivalente $X = BX + c$ para alguna matriz B_J (**matriz de iteración de Jacobi**) y algún vector c .

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 & \Rightarrow & x_1 = \frac{b_1 - a_{12}x_2 - \dots - a_{1n}x_n}{a_{11}} \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 & & x_2 = \frac{b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3 - \dots - a_{2n}x_n}{a_{22}} \\ &\vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n &= b_n & & x_n = \frac{b_n - a_{n1}x_1 - \dots - a_{nn-1}x_{n-1}}{a_{nn}} \end{aligned}$$

Coefficientes de B_J

$$x_i = \sum_{j=1, j \neq i}^n \left(-\frac{a_{ij}}{a_{ii}} \right) x_j + \frac{b_i}{a_{ii}} \quad B_{ij} = \begin{cases} -\frac{a_{ij}}{a_{ii}}, & i \neq j \\ 0, & i = j \end{cases} \quad \text{con } c_i = \frac{b_i}{a_{ii}}$$

Coefficientes de c

Fórmula de iteración del Método Jacobi

$$x_i^{(k+1)} = \frac{b_i - \sum_{j=1, j \neq i}^n a_{ij}x_j^{(k)}}{a_{ii}}$$

Se construye entonces la sucesión de vectores $\{X^{(k)}\}_k$ a partir de la fórmula de iteración $X^{(k+1)} = G(X^{(k)}) = BX^{(k)} + C$ y se espera que "converja" a la única solución X del sistema.

Criterios de aproximación

Cotas para error de truncamiento

$$i) \|R^{(k)}\| = \|AX^{(k)} - b\| < \varepsilon$$

$$i) \|X - X^{(k)}\| \leq \|B\|^k \|X - X^{(0)}\|, k \geq 1$$

$$ii) \|X^{(k)} - X^{(k-1)}\| < \varepsilon$$

$$ii) \|X - X^{(k)}\| \leq \frac{\|B\|^k}{1 - \|B\|} \|X^{(1)} - X^{(0)}\|, k \geq 1$$

$$iii) \frac{\|X^{(k)} - X^{(k-1)}\|}{\|X^{(k)}\|} < \varepsilon$$

$$iii) \|X - X^{(k)}\| \leq \frac{\|B\|^k}{1 - \|B\|} \|X^{(1)} - X^{(0)}\|, k \geq 1 \quad \text{con } \|B\| < 1$$

Convergencia Método Jacobi

$\|B\| < 1$ si A es E.D.D. $\Rightarrow$ el método Jacobi converge a una única solución.

Una matriz es **Estrictamente Diagonalmente Dominante** si

$$|a_{ii}| > \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}|$$

Si $\|B\| \geq 1$ no se puede asegurar la convergencia y se debe estudiar el radio espectral $\rho(B)$.

$\Rightarrow \det(B - \lambda I) =$ ecuación característica de B

y $\rho(B) = \max(\text{raíces de la ec. Característica})$,

si $\rho(B) \geq 1$ el método diverge

si $\rho(B) < 1$ el método converge

$\|B\|$ depende de la reubicación de las filas

Ejemplo método Jacobi

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = -1 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \\ 3x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 4 \end{cases}$$

No es E.D.D

$$\|B\|_{\infty} = 4 > 1$$

Radio espectral $\rho(B_J)$, de la matriz de iteración B_J .

$$r_{\text{espec}} = \max(\text{abs}(\text{eig}(B))) \quad \text{ó}$$

$$r_{\text{espec}} = \max(\text{abs}(\text{roots}(\text{poly}(B))))$$

$$\det(B_J - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & -1 \\ -1 & -\lambda & -3 \\ -3 & -3 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + \frac{8}{5}\lambda + \frac{3}{5} = 0 \quad \begin{matrix} \lambda_1 \approx -1 \\ \lambda_2 \approx 1.42195 \\ \lambda_3 \approx -.421954 \end{matrix}$$

$$\rho(B_J) = \max\{|-1|, |1.42195|, |-.421954|\} = 1.42195 > 1$$

El método Jacobi no converge. Verificar intercambiando filas

Jacobi-Intercambiando filas...

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = -1 \\ 3x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 4 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & 0 & -\frac{5}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{4}{5} \end{bmatrix}$$

No es E.D.D

$\|B_J\|_{\infty} = 8/3 > 1$ no se puede asegurar la convergencia, por lo tanto debemos encontrar el radio espectral $\rho(B_J)$. La ecuación característica es

$$\lambda^3 + \frac{2}{9}\lambda + \frac{1}{9} = 0$$

$$\lambda_1 \approx .631096$$

cuyas raíces son

$$\lambda_2 \approx -.315548 + .276567i$$

$$\lambda_3 \approx -.315548 - .276567i$$

$$\rho(B_J) = \max\{.631096, |-.315548 + .276567i|, |-.315548 - .276567i|\} \\ \approx \max\{.631096, .419595\} = .631096 < 1$$

Jacobi - Solución al ej.

De acuerdo al análisis de convergencia, el método iterativo de Jacobi converge a una única solución, cualquiera sea la aproximación inicial $X^{(0)}$.

Iterando con el método de Jacobi, tomando como aproximación inicial $X(0) = [0, 0, 0]^T$, y usando como criterio de aproximación

$$\|X^{(k)} - X^{(k-1)}\| < .001$$

Obtenemos:

$$X^{(1)} = [-.5, 1.3333, 0]^T, \quad X^{(2)} = [.16667, 1.8333, -.27778]^T$$

$$X^{(15)} = [.99798, 1.9990, -.99842]^T$$

$$X^{(16)} = [.99873, 1.9994, -.99901]^T$$

Como $k = 16$ es el primer entero positivo para el cual

$$\|X(k) - X(k-1)\| < .001$$

$X \approx X^{(16)}$ es solución al problema.

Fórmula vectorial de iteración del Metodo Jacobi

La matriz A puede descomponerse como: $A = D + L + U$

Donde D es la matriz diagonal de A ($\text{diag}(\text{diag}(A))$),

L es la matriz triangular estrictamente inferior de A ($\text{tril}(A, -1)$),

U es la matriz triangular estrictamente superior de A ($\text{triu}(A, 1)$),

Entonces:

$$AX = b \Leftrightarrow (D + L + U)X = b$$

$$DX + (L+U)X = b$$

$$DX = -(L+U)X + b$$

$$X = -D^{-1}(L+U)X + D^{-1}b$$

$$X^{(k)} = \underbrace{-D^{-1}(L+U)}_B X^{(k-1)} + \underbrace{D^{-1}b}_c, \quad k = 1, 2, \dots$$

$$[B/c] = Bc = [-\text{diag}(1./\text{diag}(A)) * (\text{tril}(A, -1) + \text{triu}(A, 1)), \text{diag}(1./\text{diag}(A)) * b]$$

$$B^*X + c = X = [-\text{diag}(1./\text{diag}(A)) * (\text{tril}(A, -1) + \text{triu}(A, 1)) * X + \text{diag}(1./\text{diag}(A)) * b]$$

Con b y X vectores columna

Método Gauss-Seidel

Una mejora del algoritmo de Jacobi es obtener $x_i^{(k)}$ utilizando las $x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_{i-1}^{(k)}$, ya calculadas, ya que son mejores aproximaciones a la solución exacta.

A partir de un valor inicial $[x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_{i-1}^{(0)}]$

$$x_1^{(1)} = \frac{b_1 - \sum_{j=2}^n a_{1j} x_j^{(0)}}{a_{11}}, \quad x_2^{(1)} = \frac{b_2 - a_{21} x_1^{(1)} - \sum_{j=3}^n a_{2j} x_j^{(0)}}{a_{22}}$$

En general para 1er iteración:

$$x_i^{(1)} = \frac{b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j^{(0)}}{a_{ii}}, \quad x_n^{(1)} = \frac{b_n - \sum_{j=1}^{n-1} a_{nj} x_j^{(1)}}{a_{nn}}$$

En general:

$$x_i^{(k)} = \frac{b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j^{(k-1)}}{a_{ii}}$$

El análisis de convergencia coincide con Jacobi, aunque suele converger más rápido. La matriz B_J no es la misma que B_{GS} .

Ejemplo método Gauss-Seidel

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = -1 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \\ 3x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 4 \end{cases} \quad \begin{aligned} x_1^{(k)} &= \frac{-1 + x_2^{(k-1)} - x_3^{(k-1)}}{2}, \\ x_2^{(k)} &= -x_1^{(k)} - 3x_3^{(k-1)}, \\ x_3^{(k)} &= \frac{4 - 3x_1^{(k)} - 3x_2^{(k)}}{5} \end{aligned} \quad \begin{aligned} x_1^{(k)} &= \frac{-1 + x_2^{(k-1)} - x_3^{(k-1)}}{2}, \\ x_2^{(k)} &= \frac{1 - x_2^{(k-1)} - 5x_3^{(k-1)}}{2}, \\ x_3^{(k)} &= \frac{4 + 9x_3^{(k-1)}}{5} \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}_{x^k} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & \frac{9}{5} \end{bmatrix}}_{B_G} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}_{x^{k-1}} + \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{4}{5} \end{bmatrix}}_c$$

$$\|B_G\|_\infty = 3 > 1$$

$$\rho(B_G) = \max \left\{ 0, \left| -\frac{1}{2} \right|, \left| \frac{9}{5} \right| \right\} = \frac{9}{5} > 1$$

Entonces el método diverge

En este caso, como la matriz B_G es triangular los autovalores son los elementos de la diagonal

GS-Intercambiando filas...

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = -1 \\ 3x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 4 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases} \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}_{x^k} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & \frac{9}{5} \end{bmatrix}}_{B_G} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}_{x^{k-1}} + \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{11}{6} \\ \frac{4}{5} \end{bmatrix}}_c$$

Como $\|B_G\|_\infty > 1$ no podemos asegurar la convergencia,

Pero $\rho(B_G) = \max \{0, 1/2, 5/9\} < 1$ entonces el método de Gauss-Seidel converge a la única solución del sistema dado, cualquiera sea la aproximación inicial.

$X \approx X^{(13)} = [.99898, 1.9996, -.99952]$ es solución al problema.

Fórmula vectorial de iteración del Método Gauss-Seidel

$$x_i^{(k)} = \frac{b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j^{(k-1)}}{a_{ii}} \Rightarrow \sum_{j=1}^i a_{ij} x_j^{(k)} = \sum_{j=i+1}^n (-a_{ij}) x_j^{(k-1)} + b_i$$

$$(D + L) X^{(k)} = -U X^{(k-1)} + b$$

$$X^{(k)} = \underbrace{(D + L)^{-1} (-U)}_B X^{(k-1)} + \underbrace{(D + L)^{-1} b}_c, \text{ con } k=1, 2, \dots$$

B

c

$$[B|c] = Bc = [\text{tril}(A)^{-1} * \text{triu}(A, 1), (\text{tril}(A))^{-1} * b]$$

$$B^* X + c = X = [\text{tril}(A)^{-1} * \text{triu}(A, 1) * X + (\text{tril}(A))^{-1} * b]$$

Métodos iterativos

Ventajas

- Más eficientes que los directos para sistemas de orden muy alto.
- Más simples de programar.
- Pueden encontrarse aproximaciones a la solución.
- Son menos sensibles a los errores de redondeo (importante en sist. mal condicionados).

Desventajas

- Si se tienen varios sistemas que comparten la misma matriz de coeficientes, por cada uno hay que aplicar el método.
- Aunque la convergencia esté asegurada puede ser lenta (En Gauss no es predecible).
- No se obtiene ni $\det(A)$ ni A^{-1} .